



Тема: Показникові рівняння

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення показникового рівняння, навчитися розв'язувати показникові рівняння методом зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами, методом введення нової змінної та функціонально-графічним методом;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати показникові рівняння різними способами; будувати графіки показникових рівнянь та знаходити на основі побудованих графіків корені або доводити, що таких немає;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

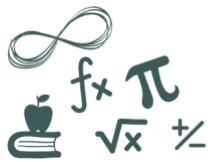
I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

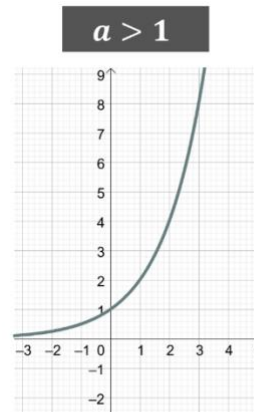
II. Актуалізація опорних знань

$a^x a^y = a^{x+y}$
$a^x : a^y = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$(ab)^x = a^x b^x$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

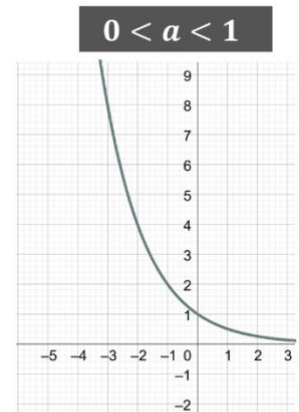
➤ Пригадаємо властивості степеня з дійсним показником



- Який вигляд мають графіки показникових функцій при $a > 1$ і $0 < a < 1$?



Зростаюча функція



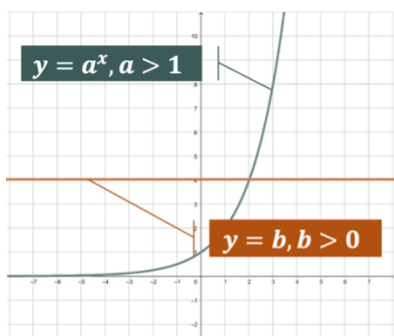
Спадна функція

III. Вивчення нового матеріалу

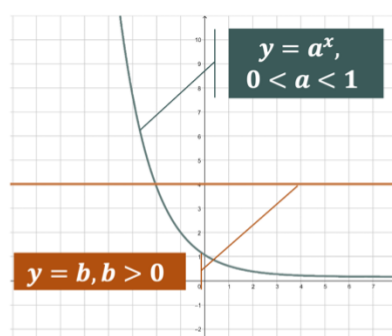
• Показникові рівняння

$$\left. \begin{aligned} 9^x &= \sqrt{3} \\ 3^x + 9^x &= 2 \\ 2^x \cdot 3^x &= \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Показникові рівняння містять змінну} \\ \text{тільки у показнику степеня} \end{array}$$

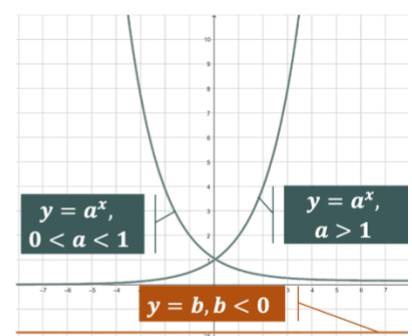
- Розглянемо найпростіше показникове рівняння $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$)
- Чому це рівняння не матиме розв'язків у випадку, коли $b \leq 0$?
(Так як $a^x > 0$)
- Чи може це рівняння мати декілька розв'язків?



Єдиний розв'язок

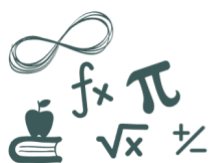


Єдиний розв'язок



Розв'язків немає

- Чому рівняння мають єдиний розв'язок?
(В обох випадках функція a^x або монотонно зростає або монотонно спадає на \mathbb{R} , тобто кожне своє додатне значення приймає лише один раз)



Теорема

При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$

*Можливий запис в зошиті: $\left. \begin{matrix} a^{x_1} = a^{x_2} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Доведення:

- Що нам необхідно довести?

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Нехай $x_1 < x_2$, порівняйте значення показникової функції

$x_1 < x_2 \Rightarrow \left \begin{matrix} a^{x_1} ? a^{x_2} \\ a > 1 \end{matrix} \right $	$x_1 < x_2 \Rightarrow \left \begin{matrix} a^{x_1} < a^{x_2} \\ a > 1 \end{matrix} \right $
$x_1 < x_2 \Rightarrow \left \begin{matrix} a^{x_1} ? a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \right $	$x_1 < x_2 \Rightarrow \left \begin{matrix} a^{x_1} > a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \right $

- Яка рівність виконується за умовою

$$a^{x_1} = a^{x_2}$$

- Який робимо висновок?

$$\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} a^{x_1} < a^{x_2} \\ a > 1 \end{matrix} \right| \\ x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} a^{x_1} > a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \right| \end{array} \Rightarrow \text{Отримали суперечність}$$

$a^{x_1} = a^{x_2}$

Доведено.

Наслідок

$$\left. \begin{matrix} a^{f(x)} = a^{g(x)} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

(Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$)

Розв'язування показникових рівнянь

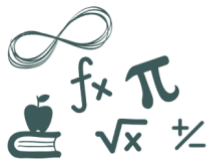
1. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами

*Метод зведення обох частин рівняння стосується рівнянь виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, та рівнянь, що можна звести до такого виду.

Наприклад:

1) $4^x = 16$

- Як для нашого прикладу можемо «подати» число 16?



$$4^x = 4^2$$

- Який отримали корінь рівняння?

$$x = 2 \left(\text{Так як } \left. \begin{matrix} a^{x_1} = a^{x_2} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow x_1 = x_2 \right)$$

2) $7^x = 9^x$

- Чи можемо обидві частини рівняння поділити на 9^x ?

$$\frac{7^x}{9^x} = 1$$

- Як для цього прикладу можемо подати одиницю?

$$\left(\frac{7}{9}\right)^x = \left(\frac{7}{9}\right)^0 \Rightarrow x = 0$$

3) $7^x = -1$

- Як можемо розв'язати це рівняння?

$$a > 0 \Rightarrow a^x > 0, \text{ коренів немає.}$$

4) $12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10$

- Що робити, коли перед нами не найпростіше показникове рівняння?

- Винесемо спільний множник за дужки та зведемо це рівняння до найпростішого

$$12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10$$

$$5^x \left(12 \cdot \frac{1}{5} + 3 - 5 \right) = 10$$

$$5^x \cdot \frac{2}{5} = 10$$

$$5^x = 10 : \frac{2}{5}$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

2. Метод введення нової змінної

1) $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$

- Як можемо виразити « 25^x »?

$$25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$$

- Уведемо нову змінну та виконаємо заміну



$$\left. \begin{array}{l} 25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0 \\ 25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2 \\ 5^x = t \end{array} \right| \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$$

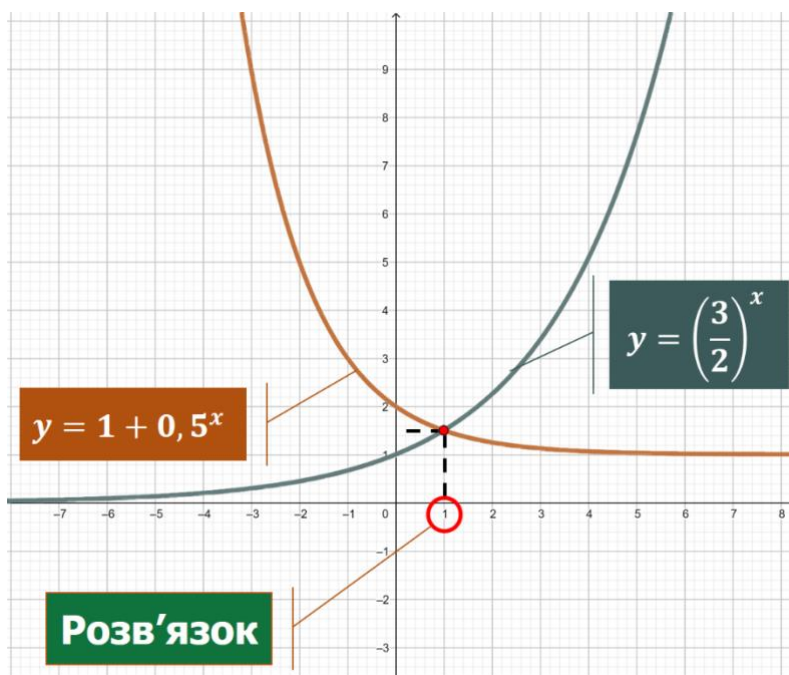
- За теоремою Вієта, які будуть корені цього рівняння?
 $t^2 + 4t - 5 = 0$
 $t_1 = 1$
 $t_2 = -5$
- Чому « $t = -5$ » не задовольняє умову?
 $5^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, отже $5^x = -5$ не має коренів.
- Виконаємо підстановку та розв'яжемо рівняння вже відомим нам способом
 $5^x = 1$
 $5^x = 5^0$
 $x = 0$

3. Функціонально-графічний метод

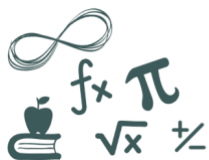
**Цим методом можна скористатися для знаходження коренів рівняння шляхом побудови графіків рівняння та на основі отриманих графіків довести, що інших коренів немає*

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0,5^x$

- Чи можемо методом спроб знайти корінь рівняння?
(Так, але це не завжди зручно)



- Побудуємо обидва графіки та знайдемо корінь рівняння



➤ Чому ми можемо стверджувати, що інших коренів немає?

$$\left. \begin{array}{l} y = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \text{зростаюча функція, так як } \frac{3}{2} > 1 \\ y = 1 + 0,5^x - \text{спадна функція, так як } 0,5 < 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \text{інших коренів} \\ \text{немає} \end{array}$$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть рівняння

1) $4^x = 64$

Розв'язок:

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

2) $3^x = \frac{1}{81}$

Розв'язок:

$$3^x = 3^{-4}$$

$$x = -4$$

3) $0,6^{2x-3} = 1$

Розв'язок:

$$0,6^{2x-3} = 0,6^0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

4) $10^{-x} = 0,0001$

Розв'язок:

$$10^{-x} = 10^{-3}$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$

Розв'язок:

$$5 - x = 3x - 7$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

6) $8^x = 16$

Розв'язок:

$$(2^3)^x = 2^4$$

$$2^{3x} = 2^4$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

7) $\sqrt{5^x} = 25$

Розв'язок:

$$(5^x)^{\frac{1}{2}} = 5^2$$

$$5^{\frac{1}{2}x} = 5^2$$

$$\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 4$$

8) $0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$

Розв'язок:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$$

$$(2^{-2})^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$$

$$2^{-2x^2+8} = 2^{x^2+1}$$

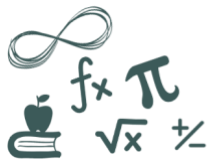
$$-2x^2 + 8 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x^2 = 8 - 1$$

$$3x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$



Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Розв'язок:

Нехай $2^x = t$, тоді:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$

Отже:

$$\begin{matrix} 2^x = 2 \\ 2^x = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2^x = 2^1 \\ 2^x = 2^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix}$$

2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

Розв'язок:

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Нехай $3^x = a$, тоді:

$$t^2 - 6t - 27 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -3 \end{cases}$

Отже:

$$\begin{matrix} 3^x = 9 \\ 3^x = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3^x = 3^2 \\ \emptyset \end{matrix} \Rightarrow x = 2$$

3) $25^x - 5^x - 20 = 0$

Розв'язок:

$$5^{2x} - 5^x - 20 = 0$$

Нехай $5^x = t$, тоді:

$$t^2 - t - 20 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = -4 \end{cases}$

Отже:

$$\begin{matrix} 5^x = 5 \\ 5^x = -4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5^x = 5^1 \\ \emptyset \end{matrix} \Rightarrow x = 1$$

4) $100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0$

Розв'язок:

Нехай $0,3^x = t$, тоді:

$$100t^2 + 91t - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

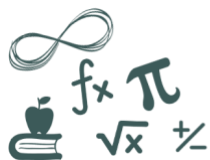
$$D = 91^2 + 4 \cdot 9 \cdot 100 = 8281 + 3600 = 11881 = 109^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-91 \pm 109}{200} = \begin{cases} t_1 = 0,09 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Отже:

$$\begin{matrix} 0,3^x = 0,09 \\ 0,3^x = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0,3^x = 0,3^2 \\ \emptyset \end{matrix} \Rightarrow x = 2$$



Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$

Розв'язок:

Враховуючи, що $a^x : a^y = a^{x-y}$:

$$2^{x-2}(2^{x-x+2} + 2^{x-1-x+2} + 1) = 56$$

$$2^{x-2}(2^2 + 2 + 1) = 56$$

$$2^{x-2} \cdot 7 = 56$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$

Розв'язок:

Враховуючи, що $a^x : a^y = a^{x-y}$:

$$5^{x-1}(6 \cdot 5^{x-x+1} - 5^{x+1-x+1} - 3 \cdot 1) = 10$$

$$5^{x-1}(6 \cdot 5^1 - 5^2 - 3) = 10$$

$$5^{x-1} \cdot 2 = 10$$

$$5^{x-1} = 5$$

$$5^{x-1} = 5^1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$

Розв'язок:

Враховуючи, що $a^x : a^y = a^{x-y}$:

$$7^{x-1}(2 \cdot 7^{x-x+1} + 7^{x+2-x+1} - 3 \cdot 1) = 354$$

$$7^{x-1}(2 \cdot 7^1 + 7^3 - 3) = 354$$

$$7^{x-1} \cdot 354 = 354$$

$$7^{x-1} = 1$$

$$7^{x-1} = 7^0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$

Розв'язок:

$$2^{2(x-2)} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$$

Враховуючи, що $a^x : a^y = a^{x-y}$:



$$2^{2x-4}(1 - 3 \cdot 2^{2x-1-2x+4} + 5 \cdot 2^{2x-2x+4}) = 228$$

$$2^{2x-4}(1 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4) = 228$$

$$2^{2x-4}(1 - 24 + 80) = 228$$

$$2^{2x-4} \cdot 57 = 228$$

$$2^{2x-4} = 4$$

$$2^{2x-4} = 2^2$$

$$2x - 4 = 2$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

№4

Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$

Розв'язок:

$$4^x \cdot 4^1 + 4^1 \cdot 4^{-x} = 10$$

$$4 \cdot 4^x + \frac{4}{4^x} - 10 = 0$$

$$4 \cdot 4^{2x} + 4 - 10 \cdot 4^x = 0 \quad | \cdot 4^x$$

Нехай $4^x = t$:

$$4t^2 - 10t + 4 = 0$$

$$D = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{8} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4^x = 2 & \quad \left| \begin{array}{l} 4^x = 4^{\frac{1}{2}} \\ 4^x = 4^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array} \end{aligned}$$

2) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$

Розв'язок:

$$0,2^{x-1} = \left(\frac{2}{10}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = (5^{-1})^{x-1} = 5^{-x+1} = 5^{1-x}$$

$$5^x - 5^{1-x} = 4$$

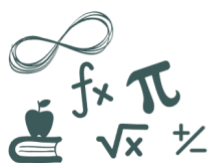
$$5^x - \frac{5}{5^x} - 4 = 0$$

$$5^{2x} - 5 - 4 \cdot 5^x = 0 \quad | \cdot 5^x$$

Нехай $5^x = t$:

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = -1 \end{cases}$



$$\left. \begin{array}{l} 5^x = 5 \\ 5^x = -1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5^x = 5^1 \\ \emptyset \end{array} \right| \Rightarrow x = 1$$

V. Підсумок уроку

- Які рівняння називають показниковими?
- Як розв'язати найпростіше показникове рівняння?
- У яких випадках показникове рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) має корені? Наведіть приклади та проілюструйте їх графічно.
- У чому полягає метод введення нової змінної?
- У чому полягає метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами?
- Якому рівнянню рівносильне рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.13-14) Виконати № 2.2; 2.6; 2.10; 2.16	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §2 Виконати № 2.4; 2.6; 2.8; 2.14; 2.28	Істер О.С.
Опрацювати §2 (п.2.1 – 2.2) Виконати № 2.1.1 (15-19); 2.1.3(3,4); 2.2.3(4,6); 2.2.5 (3,4)	Нелін Є.П.
Опрацювати §2 (ст.15-16) Виконати № 51, 54, 58, 60	Бевз Г.П.